Thema :
Rendite und Renditemessung

Lernziele

- Es ist wichtig,
die Zeitgewichtung der Rendite als Kennzahl zu verstehen,
- den Unterschied zwischen einer kontinuierlichen und einer diskreten Verzinsung zu begreifen
- und damit den Unterschied zwischen einer stetigen und einer einfachen (diskreten) Rendite zu erkennen.

Problematik der Berechnung

- Eine Anlage gewinnt im ersten Jahr 50% und verliert im zweiten Jahr 50% an Wert. Wie hoch ist die Verzinsung über die beiden Jahre?
  - Antwort: -25%
- Eine Anlage gewinnt im ersten Jahr 50% und verliert im zweiten Jahr ein Drittel an Wert. Wie hoch ist die Verzinsung über die beiden Jahre?
  - Antwort: 0%
- Eine Anlage gewinnt im ersten Jahr 50% und gewinnt im zweiten Jahr 100%. Wie hoch ist die Verzinsung über die beiden Jahre?
  - Antwort: 200%
- Renditen und Zinssätze nie addieren!!!!

Bedeutung der Rendite

- Die Rendite ist die Kennzahl, die den Erfolg der Finanzanlage misst ohne jedoch das Risiko zu berücksichtigen→ Performance (Vorsicht: Performanceindizes wie DAX)
- Sie ist eine Wachstumsrate, die angibt, wie schnell das z.B. angelegte Kapital wächst.
- Zu unterscheiden sind:
  Nominelle Rendite (ohne Berücksichtigung des Kaufkraftveränderung) und
  reale Rendite (mit Berücksichtigung des Kaufkraftveränderung)

Erfolg der Anlage

- Erfolg der Anlage = Differenz zwischen Preis der Anlage (Kurs) bei Kauf und Preis der Anlage (Kurs) bei Verkauf zusätzlich der Zahlungen während des Anlagezeitraums bezogen auf den Preis der Anlage bei Kauf (meist normiert auf ein Jahr)
  - Zusätzliche Zahlung bei Anleihen: Zins
  - Zusätzliche Zahlung bei Aktien: Dividende (und möglicherweise Bezugsrechte)

Die einfache (diskrete) Rendite

- Beispiel:
  Kauf zu 100€ (K_0), Verkauf nach **einem** Jahr zu 110€ (K_1) und einer einmaligen (diskreten) Zinszahlung von 5€ (Z) führen zu einer Rendite von 15%:

$$r_{ein} = \frac{K_1 + Z - K_0}{K_0} = \frac{110 + 5 - 100}{100} = 0{,}15 = 15\%$$

- Holding – Period - Return

Relevanz

- Alle in der Praxis genannten Verzinsungen beziehen sich auf die einfache (diskrete) Rendite.
- Effektivverzinsung eines Kreditbetrags
- Rendite einer Anleihe etc.
- Anleger interessiert sich häufig nicht dafür, wann verzinst wird, sondern wie hoch das Endvermögen am Endpunkt des Anlagezeitraums ist.

Berechnung des Endvermögens

- Mit Hilfe der einfachen diskreten Rendite:
  $$\left(K_1 + Z\right) = K_0 \cdot \left(1 + r_{ein}\right) = 100 \cdot \left(1 + 0{,}15\right) = 115$$
- Aus Sicht des Anlegers beträgt das Endvermögen 115€

Zeitliche Normierung der Renditeberechnung

- Um die Vergleichbarkeit unterschiedlichster Anlagen und unterschiedlichster Anlagezeiträume herzustellen, normiert man die Rendite auf einen Anlagezeitraum von **einem** Jahr.

Beispiele

1. Finanzanlage ist in 10 Jahren um 150% gewachsen: Durchschnittliche (diskrete) Rendite pro Jahr: 9,5958%
2. Vermögen wächst pro Monat um +0,5%: Durchschnittliche (diskrete) Rendite pro Jahr: 6,17%

Formeln und Lösung 1

- Es gilt: $V_{10} = V_0 \cdot (1+r)$ und $V_1 = V_0 \cdot (1+r_{ein})$ und

$$V_2 = V_1 \cdot (1+r_{ein}) \ldots\ldots V_{10} = V_9 \cdot (1+r_{ein}) \text{ also}$$

$$V_{10} = V_0 \cdot (1+r_{ein})^{10} \text{ somit:}$$

$$\frac{V_{10}}{V_0} = (1+r_{ein})^{10} \text{ oder } \frac{V_0 \cdot (1+r)}{V_0} = (1+r_{ein})^{10}$$

$$\text{oder } r_{ein} = \sqrt[10]{1+r} - 1 = \sqrt[10]{1+150\%} - 1 = 9{,}5958\%$$

V = Vermögen;
V1 = Endbestand der Periode 0 **und** Anfangsbestand der Periode 1 mit einer Periodenlänge von **einem** Jahr (geometrisches Mittel der Faktoren)

Formeln und Lösung 2

- Es gilt:

$$V_{12} = V_0 \cdot (1 + r_{ein}) \text{und } V_1 = V_0 \cdot (1 + r) \text{ und}$$

$$V_2 = V_1 \cdot (1 + r) \ldots\ldots V_{12} = V_{10} \cdot (1 + r) \text{also}$$

$$V_{12} = V_0 \cdot (1 + r)^{12} \text{ somit:}$$

$$\frac{V_{12}}{V_0} = (1 + r)^{12} \text{ und } \frac{V_{12}}{V_0} = (1 + r_{ein}) \text{ also}$$

$$\text{oder } r_{ein} = (1 + r)^{12} - 1 = (1 + 0{,}5\%)^{12} - 1 = 1{,}0617 - 1$$

$$\text{somit } 6{,}17\%$$

V = Vermögen;
V1 = Endbestand der Periode 0 **und** Anfangsbestand der Periode 1 mit einer Periodenlänge von **einem** Monat

Stetige Rendite

- Strikt von der diskreten Rendite zu unterscheiden ist die stetige Rendite (r_s). Es wird eine kontinuierliche, laufende also stetige Verzinsung (permanenter Zinseszins) unterstellt.
- Ausgangspunkt: Stetiges Wachstum

Stetiges Wachstum

- e = Eulersche Zahl; r^s = Stetige Rendite

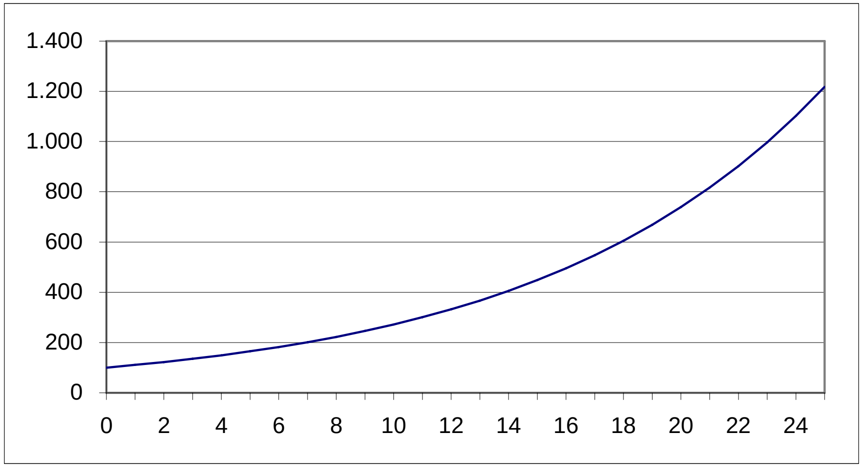
$$K_t = e^{r_t^s} \cdot K_{t-1}$$

Es erfolgt eine permanente Verzinsung des eingesetzten Kapitals.

Ein Beispiel

stetige Verzinsung
10,0%

Jahre	Kt	Diskrete Verzinsung
0	100,00	
1	110,52	10,52%
2	122,14	10,52%
3	134,99	10,52%
4	149,18	10,52%
5	164,87	10,52%
6	182,21	10,52%
7	201,38	10,52%
8	222,55	10,52%
9	245,96	10,52%
10	271,83	10,52%
11	300,42	10,52%
12	332,01	10,52%
13	366,93	10,52%
14	405,52	10,52%
15	448,17	10,52%
16	495,30	10,52%
17	547,39	10,52%
18	604,96	10,52%
19	668,59	10,52%
20	738,91	10,52%
21	816,62	10,52%
22	902,50	10,52%
23	997,42	10,52%
24	1.102,32	10,52%
25	1.218,25	10,52%



Das eingesetzte Kapital (=100) soll 25 Jahre mit der konstanten stetigen Rendite von 10% wachsen. Das Endvermögen beträgt 1.218,25. Die diskrete Rendite pro Jahr beträgt 10,52%.

Berechnung der stetigen Rendite aus Anfangs- und Endbestand

- Ausgangspunkt: $K_t = e^{r_t^s} \cdot K_{t-1}$
- Logarithmieren: $\ln(K_t) = \ln\left(e^{r_t^s}\right) + \ln(K_{t-1})$
- Oder: $\ln(K_t) = r_t^s + \ln(K_{t-1})$
- Umstellen: $r_t^s = \ln(K_t) - \ln(K_{t-1}) = \ln\left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right)$
- Ergebnis: Die stetige Rendite ergibt sich als Differenz der logarithmierten End- und Anfangsgrößen.

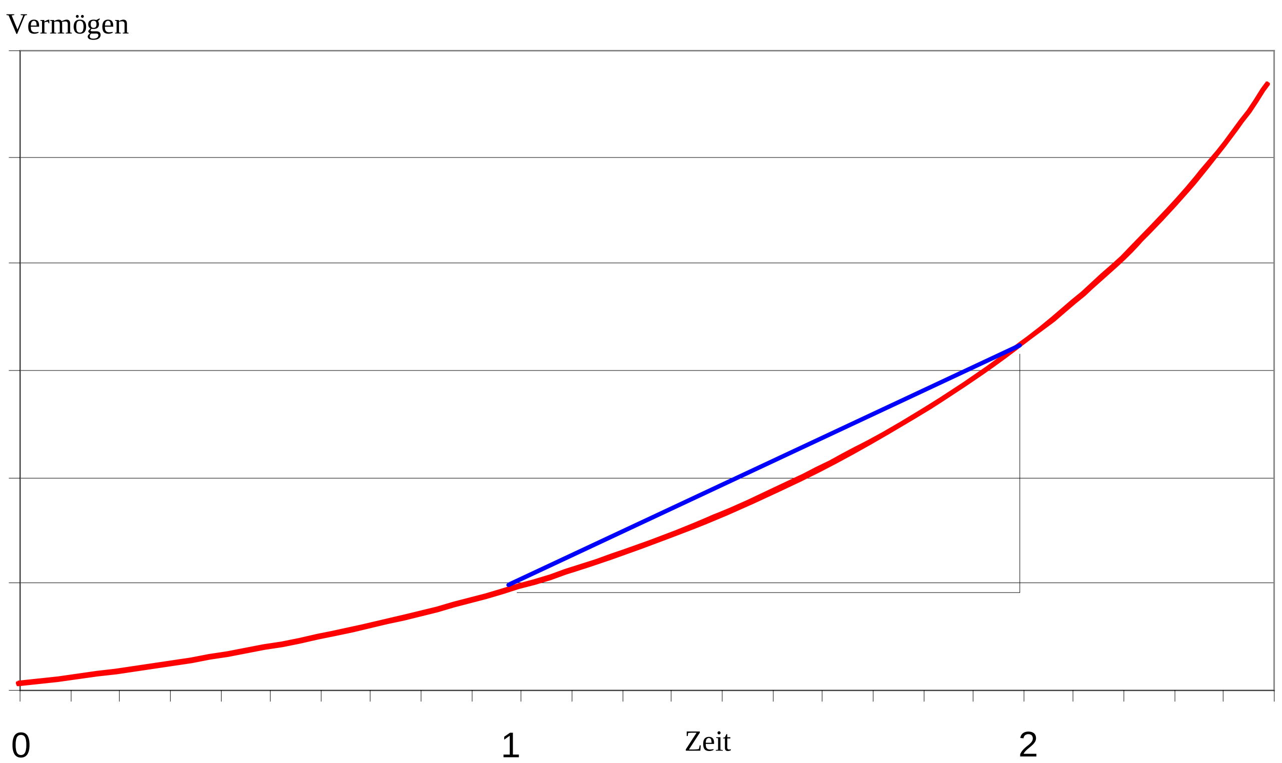
Das Beispiel

- Der eingesetzte Anfangsbestand (=100) soll nach 25 Jahre auf einen Endbestand von 1.218,25 angewachsen sein.
- Die stetige Rendite beträgt ln(1.218,25) – ln(100) = 2,5 oder 250%.
- Die stetige Rendite auf das Jahr bezogen 250%/25 = 10%.

Relevanz

- Im Geschäftsleben werden so gut wie nie steige Renditen verwendet.
- In den Berechnungen z.B. zum Portfoliomanagement und Risikomanagement werden meist stetige Renditen verwandt, da sie für die Anwendung der Statistik wesentlich besser geeignet sind.

Zum Unterschied zw. diskreter und stetiger Rendite



Stetige Verzinsung (Tangente)

Diskrete Verzinsung (Sekante)

Zusammenhang zwischen stetiger und diskreter Rendite

- Möglichkeit der Umrechnung:

$$r_t^s = \ln\left(1 + r_t^{ein}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{K_t}{K_{t-1}} - 1\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{K_t}{K_{t-1}} - 1\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{K_t}{K_{t-1}}\right) = \ln\left(K_t\right) - \ln\left(K_{t-1}\right)$$

Literatur

- Poddig Th. u.a.: Statistik, Ökonometrie, Optimierung, 2. Aufl., Bad Soden 2001 oder neuere Auflage
- Spremann, K.: Portfoliomanagement; 2. Aufl., München, Wien 2003, S. 60-90
- Daten zu Anleihemärkten: www.Bundesbank.de
- Daten zu Aktienmärkten: http://de.finance.yahoo.com/ dann z.B. DAX dann historische Kurse
- Zu den empirischen Daten: Spremann, K.: Portfoliomanagement; 2. Aufl., München, Wien 2003, S. 91-118