

# Thema 10: Lineare Einfachregression



---

Ein universelles Instrument zur empirischen Untersuchung von theoretischen Zusammenhängen (Falsifikationsversuche von Hypothesen)



# Anleihenkurse und Zinssatz

---

- Bedeutende Einflussgröße für Kursentwicklung von Anleihen ist der Zinssatz
- Kenntnis vom Zinssatz lässt Rückschluss auf die Kursentwicklung von Anleihen zu
- Kann man das Zinsniveau erklären und prognostizieren?



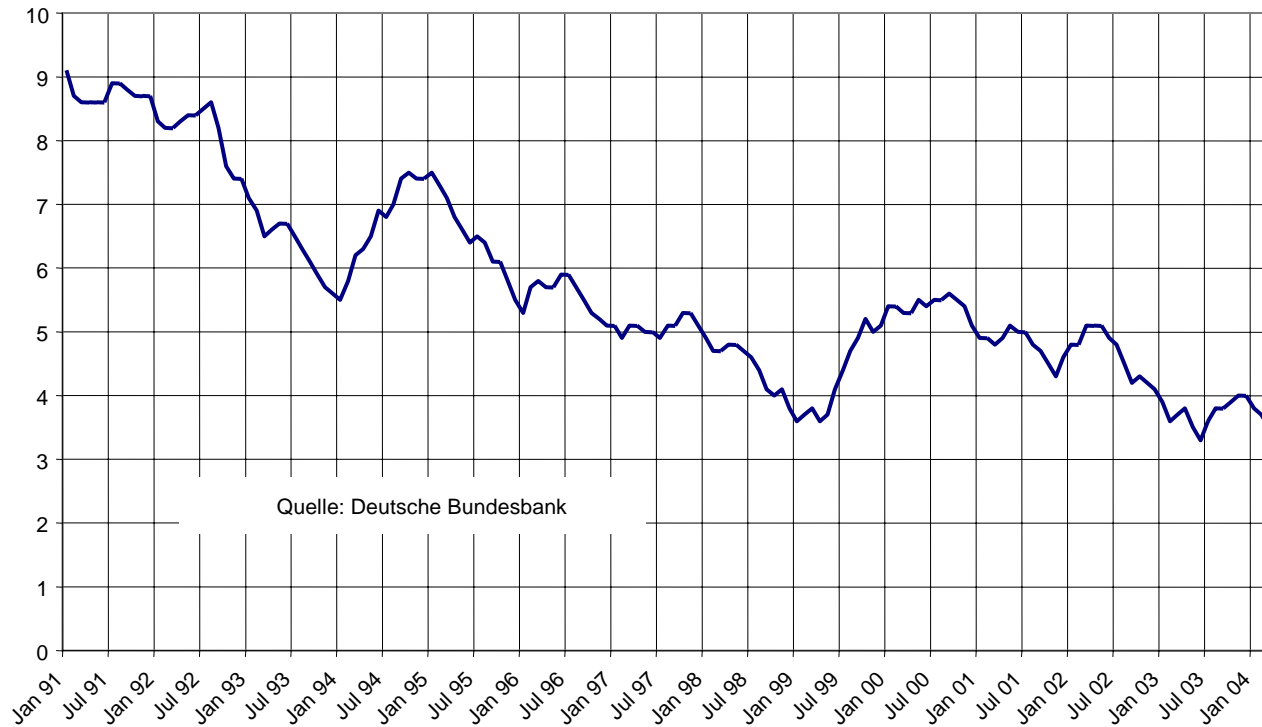
# Motivation

---

- Kauf einer Anleihe (5,625) zu 113,75 mit einer Restlaufzeit von 24 Jahren wegen hoher Rendite (4,661%) und Verkauf nach einem Jahr.
- **Problem:**  
Zinsänderungsrisiko und damit Kursrisiko
- 1. Marktzinssenkung um **einen** Prozentpunkt:  
Verkaufskurs: 130,18 € (zum Zins Kursgewinn)
- 2. Marktzinserhöhung um **einen** Prozentpunkt:  
Verkaufskurs: 99,54 € (zum Zins Kursverlust)

# In der Praxis ?

## WU0017 Umlaufrenditen inländischer Inhaberschuldverschreibungen / Insgesamt



Beispiel:

# Zusammenhang zwischen Zins- niveau und Inflationserwartungen

- **Irving Fisher (1930)** behauptete:  
Gläubiger fordern:  
a) eine Entschädigung für den Konsumverzicht b) einen Ausgleich für die erwartete Inflation
- Beispiel: Gläubiger bekommt 5% Zins, die Inflation beträgt 10%, er kann sich nach einem Jahr 5% weniger Güter kaufen!!!!
- Also wird der Gläubiger mehr als 10% Zins verlangen: Der geforderte Zins ist eine Funktion der erwarteten Inflationsrate!!!  
 $i = f(\pi^e)$  z.B. als lineare Funktion  
 $i = m \cdot \pi^e + b$  (Excel:  $y = m \cdot x + b$ )

Gibt es den Zusammenhang auch in der Realität?



# Das Bestimmtheitsmaß

---

- Das Bestimmtheitsmaß ( $R^2$ ) gibt Auskunft darüber, wie „gut“ die Erklärung in der Praxis passt.
- $R^2 = 1$ : Theoretische Erklärung passt perfekt
- $R^2 = 0$ : Kein Erklärungszusammenhang

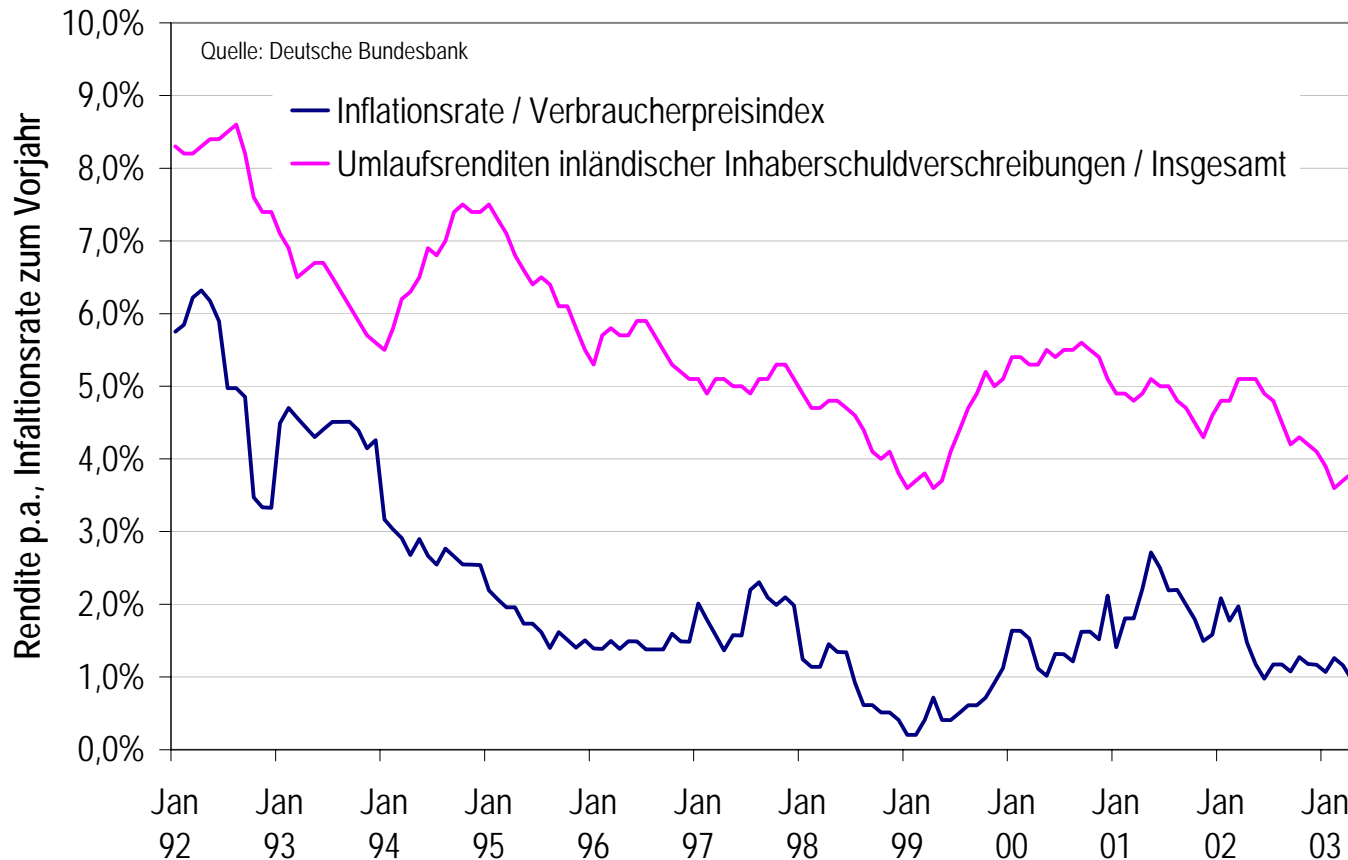


# Datenprobleme?

---

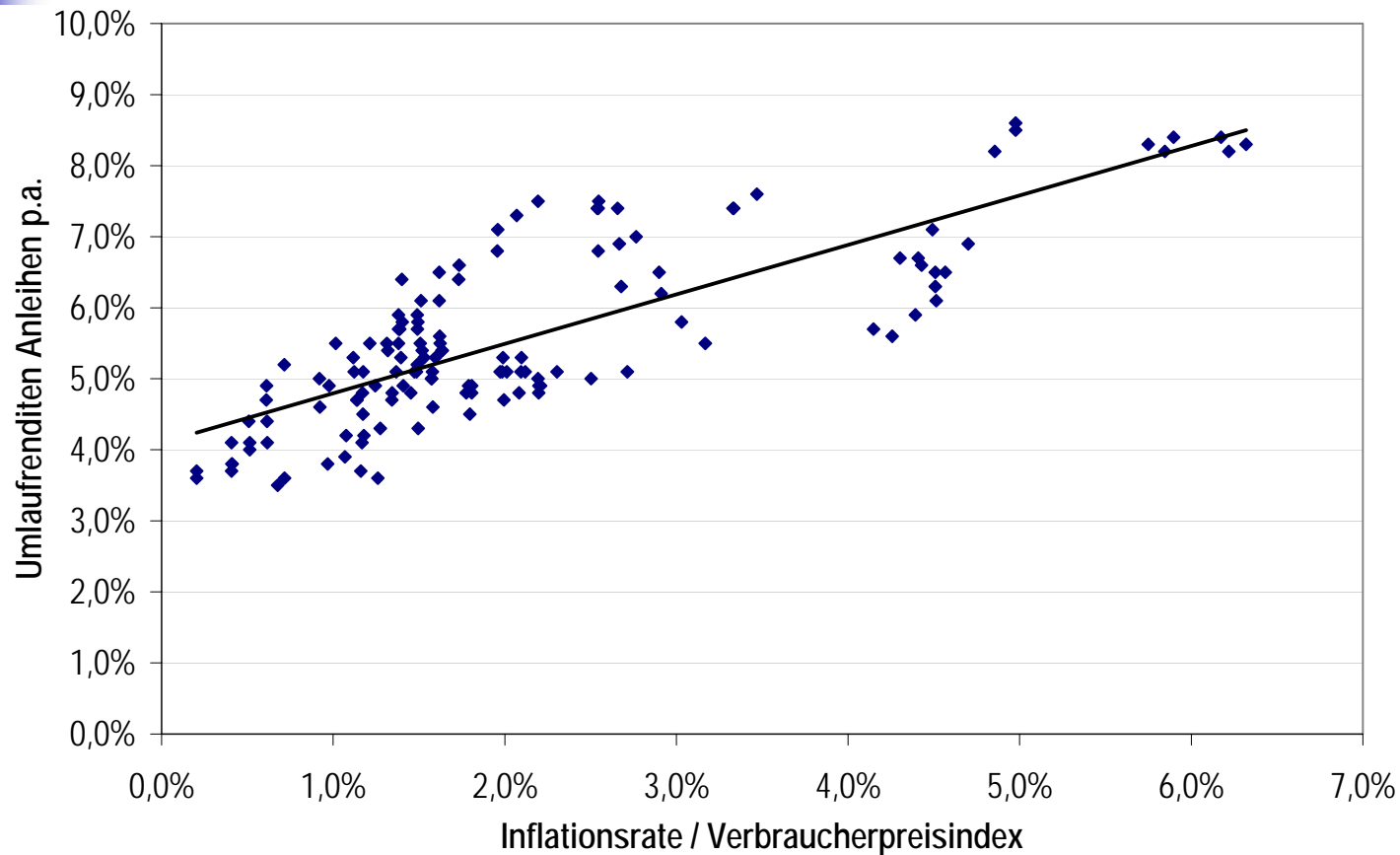
- Wo finde ich Daten über Zins und Preise?
  - <http://www.bundesbank.de>
- Bundesbank Zeitreihen:
  - Kapitalmarkt/Renditen und Indizes deutscher Wertpapiere
  - Konjunkturlage/Preise/Verbraucherpreisindex
- Datenaufbereitung
  - Diagramm: Zeitverlauf, Punktwolke

# Zeitreihenverlauf





# Punktwolke / Streudiagramm



# Lineare Gleichung

- Annahme: Linearer Zusammenhang zwischen Inflationsrate und Renditen
- Allgemeine lineare Gleichung
  - Aus  $y_t = m x_t + b + \varepsilon_t$  wird mit Zins  $i$ , Inflationsrate  $\pi$ , Parameter  $m$  und  $b$
  - $i_t = b + m \pi_t + \varepsilon_t$
- Lineare Einfachregression
  - $i$  = abhängige Variable (Regressand)
  - $\pi$  = unabhängige Variable (Regressor)
  - Regression von  $i$  auf  $\pi$ , beschreibt Abhängigkeit zwischen beiden Variablen
  - $\varepsilon_t$  = Störgröße oder Residuen



# Lineare Einfachregression

---

- Lineare Regressionsfunktion

$$\hat{i}_t = b + m \cdot \pi_t$$

- Regressionskoeffizienten: m und b
- Residuen: Abweichungen zwischen beobachteten Werten und geschätzten Werten

$$\varepsilon_t = i_t - \hat{i}_t$$

$$\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^n (i_t - \hat{i}_t)^2$$

- Minimierung Summe Abweichungsquadrate mit Methode der kleinsten Quadrate



# Lineare Einfachregression

- Mit der Methode der kleinsten Quadrate unbekannte Regressionskoeffizienten m und b berechnen (allgemein)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

# Lineare Einfachregression

- Methode der kleinsten Quadrate unbekannte Regressionskoeffizienten  $m$  und  $b$  berechnen

Summe $x_i$	Summe $y_i$	Summe $x_i^2$	Summe $y_i^2$	Summe $x_i y_i$	Anzahl $n$
289,0%	762,9%	8,8%	44,6%	18,0%	137

Geschätzte Parameter  
der Koeffizienten

$b$	0,04
$m$	0,73

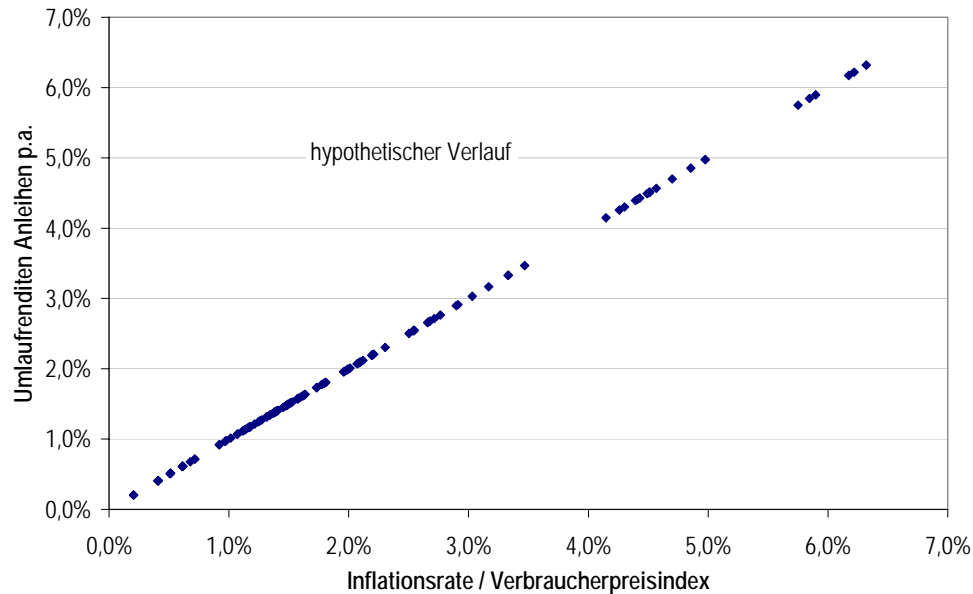
Geschätzte lineare  
Gleichung (speziell)

$$\hat{i}_t = b + m \cdot \pi_t$$

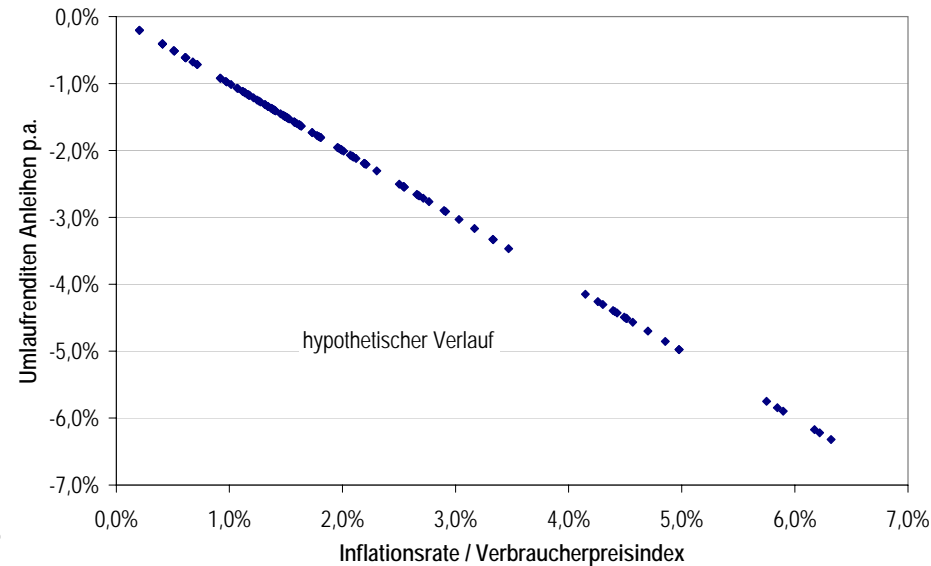
$$\hat{i}_t = 0,04 + 0,73 \pi_t$$

# Korrelation

Positive  
Korrelation  
Anstieg?



Negative  
Korrelation  
Anstieg?





# Korrelationskoeffizient

- Korrelationskoeffizient  $\rho$  (griechisch: roh): Maß für den Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen
- Korrelationskoeffizient normiert  $-1 \leq \rho \leq +1$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}}$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)(y_i - \bar{y}_i)}{\sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 \cdot \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}}$$

# Bestimmtheitsmaß

- Bestimmtheitsmaß: Maß für die durch die lineare Regressionsfunktion gelieferte Erklärung der Variation der abhängigen Variablen aus der Variation der unabhängigen Variablen

$$r^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$= \frac{\text{erklärte Streuung}}{\text{zu erklärende Streuung}}$$

Mittelwert	Bestimmtheitsmaß
y-	r <sup>2</sup>
5,6%	63,36%
Summe	Summe
erklärte Abw.	zu erklärende Abw.
1,3%	2,1%





# Oder einfach mit Excel

Die Formel RGP liefert folgendes Ergebnis:

m	0,73	0,04	b
	0,04610416	0,001135443	
R <sup>2</sup>	0,63646866	0,007733065	
F-Test	253,865195	145	
	0,01518121	0,008671044	



# Ergebnis

---

- Lineare Gleichung:  $\hat{i}_t = b + m \cdot \pi_t$   
 $\hat{i}_t = 0,04 + 0,73 \pi_t$
- Geschätzte Gleichung erklärt ca. 63,6% der Variation der Renditen durch die Variation der Inflationsrate.
- Schlussfolgerung: Wir können einen Großteil der Entwicklung der Renditen durch die Inflationsrate abschätzen und somit auch die Entwicklung der Anleihekurse.



# Prognose

---

Zwei Möglichkeiten:

1.  $\hat{i}_t = b + m \cdot \pi_t$  = unverzögerte Schätzung
2.  $\hat{i}_{t+1} = b + m \cdot \pi_t$  = verzögerte Schätzung

Zu 1: Prognose der Inflation und dann des Zinses oder:

Zu 2: neue Schätzung mit „time-lag“  
(Verzögerung)



# Literatur

---

- Auer, L. von: Ökonometrie, Eine Einführung, Berlin u. a. 1999
- Baltagi, Badi H.: Econometrics, 2nd Revised Edition, Berlin u. a. 1999
- Bleymüller, J., Gehlert, G., Gülicher, H.: Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, 11. Aufl., München 1998
- Harvey, Andrew C.: Zeitreihenmodelle, 2. Aufl., München u. a. 1995
- **Poddig Th.** u.a.: Statistik, Ökonometrie, Optimierung, 2. Aufl., Bad Soden 2001 oder neuere Auflage