Thema 11: Lineare Einfachregression

Ein universelles Instrument zur empirischen Untersuchung von theoretischen Zusammenhängen (Falsifikationsversuche von Hypothesen)

Anleihenkurse und Zinssatz

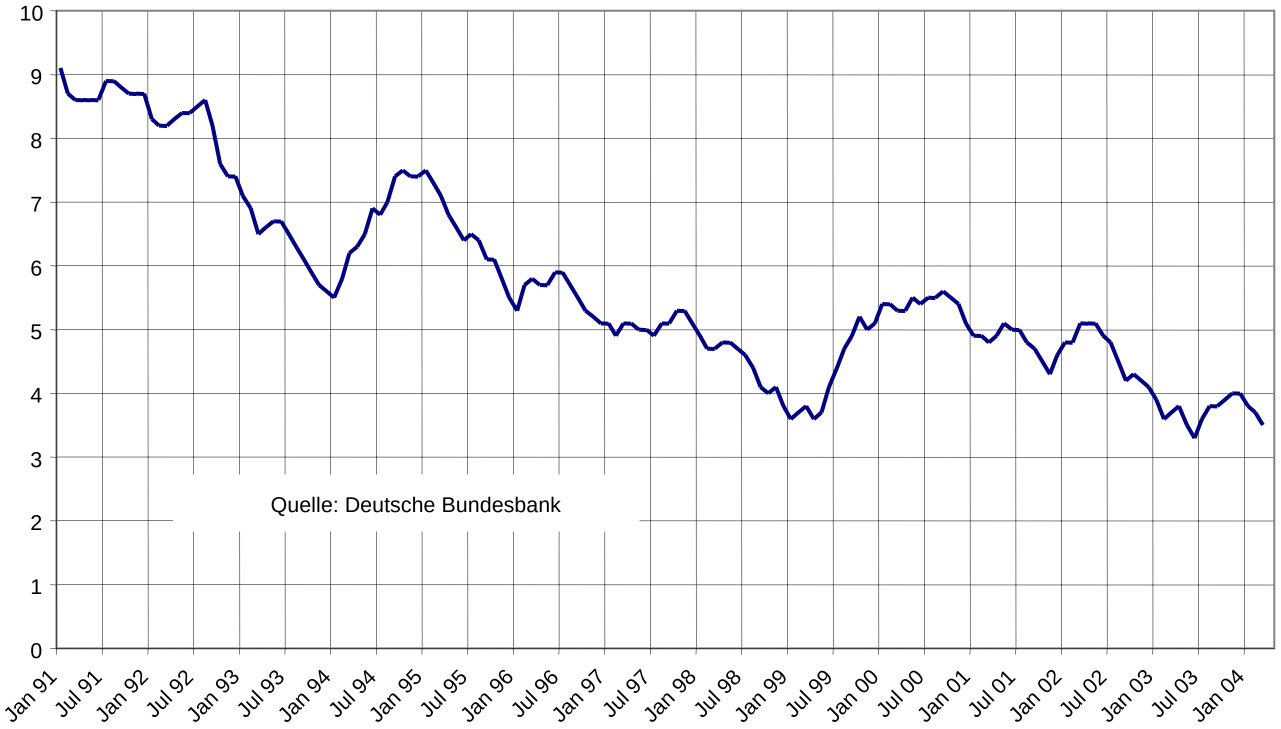
- Bedeutende Einflussgröße für Kursentwicklung von Anleihen ist der Zinssatz
- Kenntnis vom Zinssatz lässt Rückschluss auf die Kursentwicklung von Anleihen zu
- Kann man das Zinsniveau erklären und prognostizieren?

Motivation

- Kauf einer Anleihe (5,625) zu 113,75 mit einer Restlaufzeit von 24 Jahren wegen hoher Rendite (4,661%) und Verkauf nach einem Jahr.
- **Problem**:
  Zinsänderungsrisiko und damit Kursrisiko
- 1. Marktzinssenkung um **einen** Prozentpunkt:
  Verkaufskurs: 130,18 € (zum Zins Kursgewinn)
- 2. Marktzinserhöhung um **einen** Prozentpunkt:
  Verkaufskurs: 99,54 € (zum Zins Kursverlust)

In der Praxis ?

WU0017 Umlaufsrenditen inländischer Inhaberschuldverschreibungen / Insgesamt



Beispiel:

Zusammenhang zwischen Zins-niveau und Inflationserwartungen

- **Irving Fisher (1930**) behauptete:
  Gläubiger fordern:
  a) eine Entschädigung für den Konsumverzicht b) einen Ausgleich für die erwartete Inflation
- Beispiel: Gläubiger bekommt 5% Zins, die Inflation beträgt 10%, er kann sich nach einem Jahr 5% weniger Güter kaufen!!!!
- Also wird der Gläubiger mehr als 10% Zins verlangen: Der geforderte Zins ist eine Funktion der erwarteten Inflationsrate!!!
  $i = f(\pi^e)$ z.B. als lineare Funktion
  $i = m \cdot \pi^e + b$ (Excel: $y = m \cdot x + b$)

  Gibt es den Zusammenhang auch in der Realität?

Das Bestimmtheitsmaß

- Das Bestimmtheitsmaß (R^2) gibt Auskunft darüber, wie „gut“ die Erklärung in der Praxis passt.
- $R^2 = 1$: Theoretische Erklärung passt perfekt
- $R^2 = 0$: Kein Erklärungszusammenhang

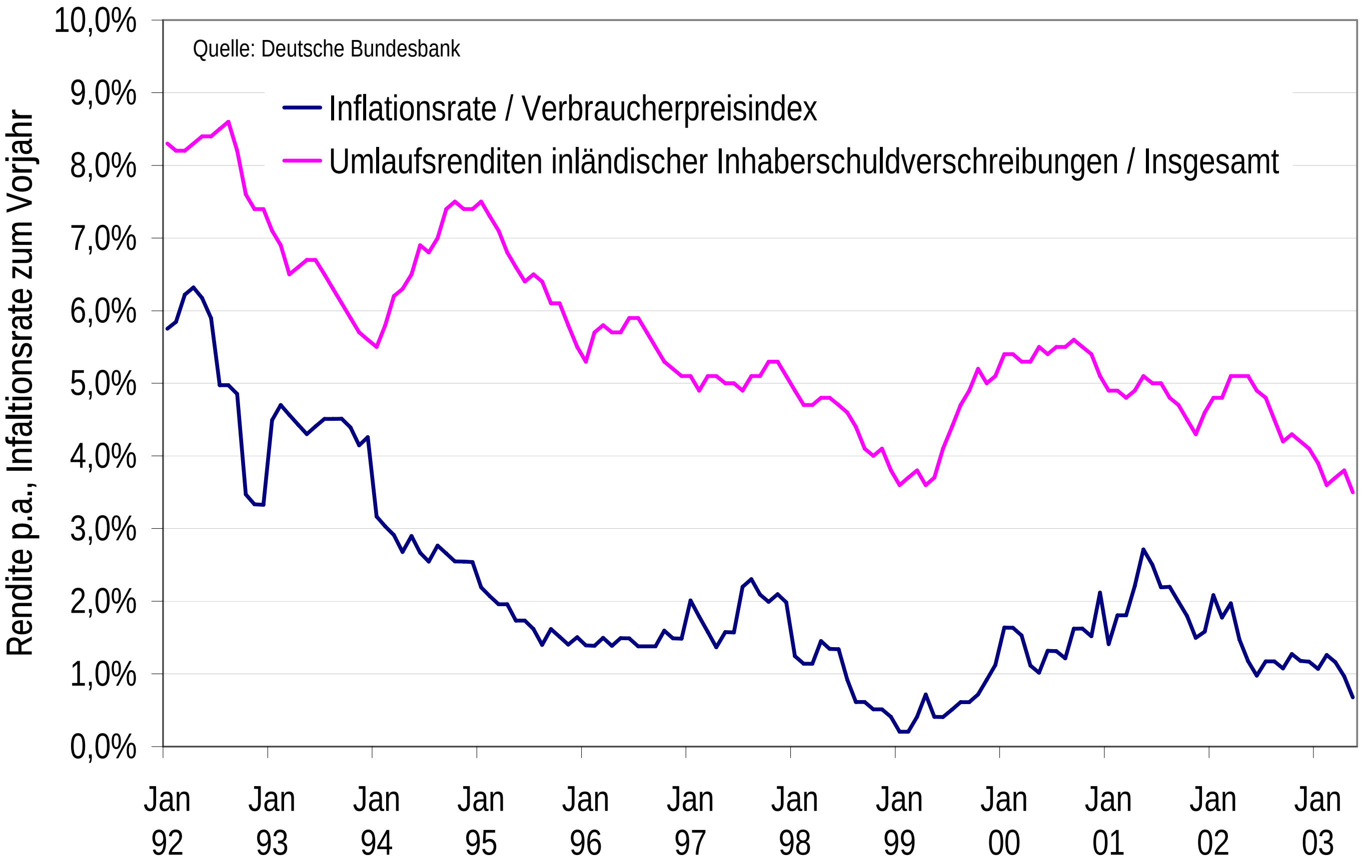
Datenprobleme?

- Wo finde ich Daten über Zins und Preise?
  - http://www.bundesbank.de

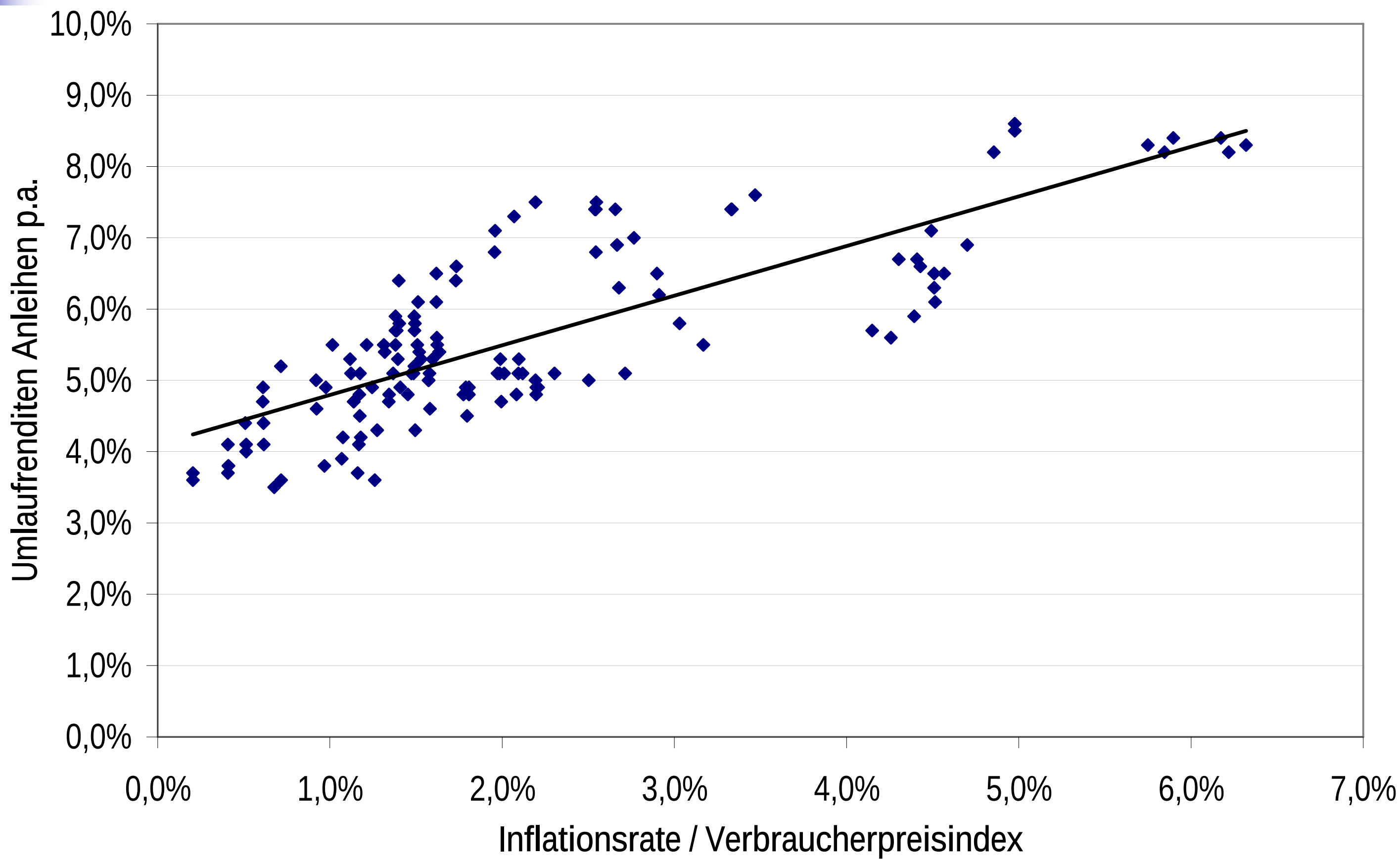
- Bundesbank Zeitreihen:
  - Kapitalmarkt/Renditen und Indizes deutscher Wertpapiere
  - Konjunkturlage/Preise/Verbraucherpreisindex

- Datenaufbereitung
  - Diagramm: Zeitverlauf, Punktwolke

Zeitreihenverlauf



Punktwolke / Streudiagramm



Lineare Gleichung

- Annahme: Linearer Zusammenhang zwischen Inflationsrate und Renditen
- Allgemeine lineare Gleichung
  - Aus $y_t = m\, x_t + b + \varepsilon_t$ wird mit Zins i, Inflationsrate π, Parameter m und b
  - $i_t = b + m\, \pi_t + \varepsilon_t$
- Lineare Einfachregression
  - i = abhängige Variable (Regressand)
  - π = unabhängige Variable (Regressor)
  - Regression von i auf π, beschreibt Abhängigkeit zwischen beiden Variablen
  - ε_t = Störgröße oder Residuen

Lineare Einfachregression

- Lineare Regressionsfunktion

$$\hat{i}_t = b + m \cdot \pi_t$$

- Regressionskoeffizienten: m und b
- Residuen: Abweichungen zwischen beobachteten Werten und geschätzten Werten

$$\varepsilon_t = i_t - \hat{i}_t$$

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{n} (i_t - \hat{i}_t)^2$$

- Minimierung Summe Abweichungsquadrate mit Methode der kleinsten Quadrate

Lineare Einfachregression

- Mit der Methode der kleinsten Quadrate unbekannte Regressionskoeffizienten m und b berechnen (allgemein)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Lineare Einfachregression

- Methode der kleinsten Quadrate unbekannte Regressionskoeffizienten m und b berechnen

Summe x_i	Summe y_i	Summe x_i^2	Summe y_i^2	Summe $x_i\, y_i$	Anzahl n
289,0%	762,9%	8,8%	44,6%	18,0%	137

Geschätzte Parameter der Koeffizienten

b	0,04
m	0,73

Geschätzte lineare Gleichung (speziell)

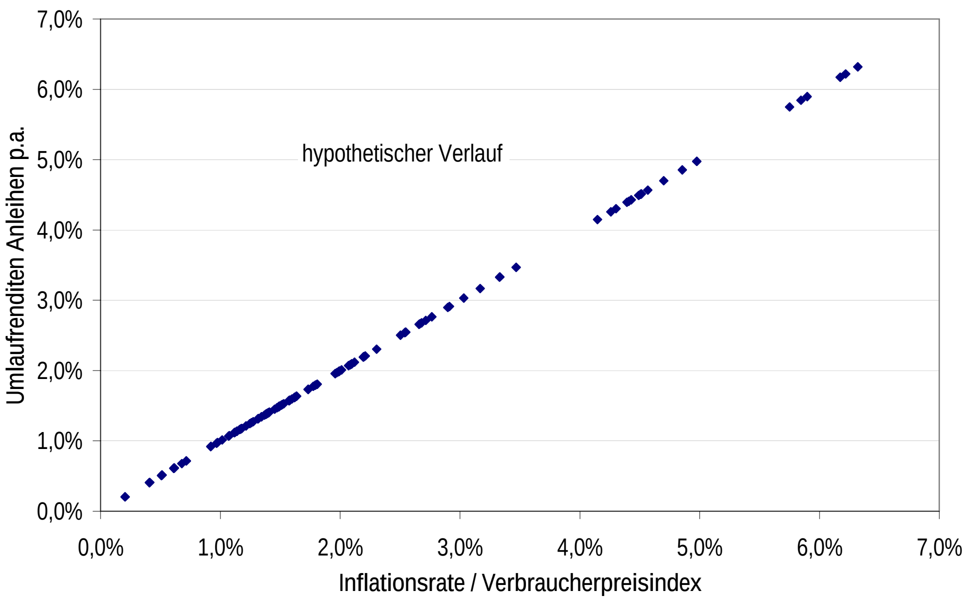
$$\hat{i}_t = b + m \cdot \pi_t$$

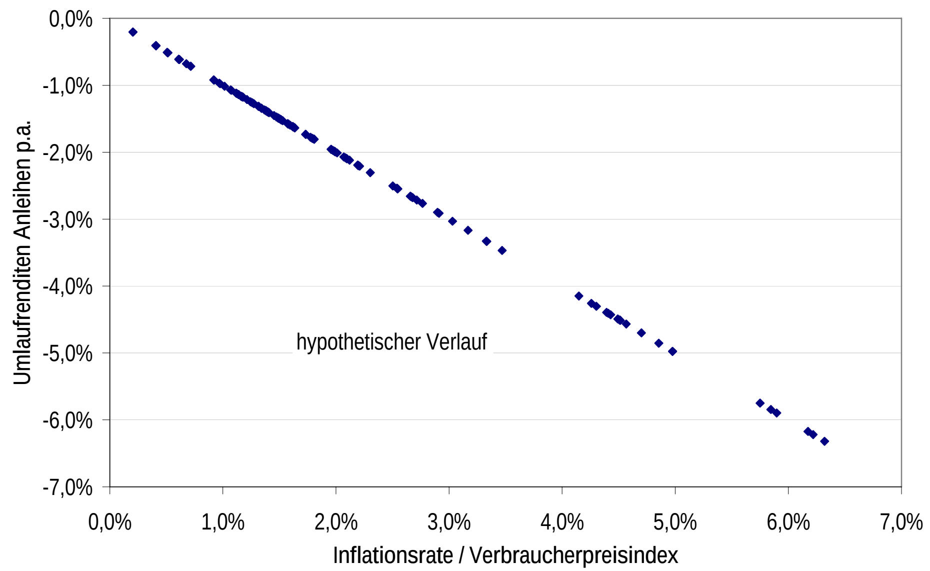
$$\hat{i}_t = 0{,}04 + 0{,}73\ \pi_t$$

Korrelation

Positive Korrelation Anstieg?

Negative Korrelation Anstieg?





Korrelationskoeffizient

- Korrelationskoeffizient ρ (griechisch: roh): Maß für den Zusammenhang zwischen zwei Zufallsvariablen

- Korrelationskoeffizient normiert $-1 \leq \rho \leq +1$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\ \mathrm{Var}(Y)}}$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_i)(y_i - \overline{y}_i)}{\sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_i)^2 \cdot \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y}_i)^2}}$$

Bestimmtheitsmaß

- Bestimmtheitsmaß: Maß für die durch die lineare Regressionsfunktion gelieferte Erklärung der Variation der abhängigen Variablen aus der Variation der unabhängigen Variablen

$$r^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

$$= \frac{\text{erklärte Streuung}}{\text{zu erklärende Streuung}}$$

Mittelwert y-	Bestimmtheitsmaß r^2
5,6%	63,36%
Summe erklärte Abw.	Summe zu erklärende Abw.
1,3%	2,1%

Oder einfach mit Excel

Die Formel RGP liefert folgendes Ergebnis:

m	0,73	0,04	b
	0,04610416	0,001135443	
R^2	0,63646866	0,007733065	
F-Test	253,865195	145	
	0,01518121	0,008671044	

Ergebnis

- Lineare Gleichung:

$$\hat{i}_t = b + m \cdot \pi_t$$

$$\hat{i}_t = 0{,}04 + 0{,}73\ \pi_t$$

- Geschätzte Gleichung erklärt ca. 63,6% der Variation der Renditen durch die Variation der Inflationsrate.
- Schlussfolgerung: Wir können einen Großteil der Entwicklung der Renditen durch die Inflationsrate abschätzen und somit auch die Entwicklung der Anleihekurse.

Prognose

Zwei Möglichkeiten:

1. $\hat{i}_t = b + m \cdot \pi_t$ = unverzögerte Schätzung

2. $\hat{i}_{t+1} = b + m \cdot \pi_t$ = verzögerte Schätzung

Zu 1: Prognose der Inflation und dann des Zinses oder:

Zu 2: neue Schätzung mit „time-lag“ (Verzögerung)

Literatur

- Auer, L. von: Ökonometrie, Eine Einführung, Berlin u. a. 1999
- Baltagi, Badi H.: Econometrics, 2nd Revised Edition, Berlin u. a. 1999
- Bleymüller, J., Gehlert, G., Gülicher, H.: Statistik für Wirtschaftswissenschaftler, 11. Aufl., München 1998
- Harvey, Andrew C.: Zeitreihenmodelle, 2. Aufl., München u. a. 1995
- **Poddig Th.** u.a.: Statistik, Ökonometrie, Optimierung, 2. Aufl., Bad Soden 2001 oder neuere Auflage